تحلیل پاسخ دینامیکی سازه های بلند تحت تأثیر نیروی محوری*

مهرداد محمدنژاد[۱]		حسن حاجی کاظمی[۲]

چکیده *در این تحقیق، معادلات انتگرالی تضعیف شده جهت محاسبه فرکانس های طبیعی ارتعاش سازه های بلند دارای جرم و سختی متغیر در ارتفاع و تحت تأثیر نیروی محوری ارائه شده است. معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد یک تیر کنسول غیرمنشوری با سختی برشی و سختی خمشی و تحت تأثیر نیروی محوری، از طریق چهار مرتبه انتگرال گیری پی در پی به فرم تضعیف شده ی آن تبدیل شده است. با تقریب تابع مد شکل ارتعاش توسط یک سری توانی، معادله انتگرالی به یک دستگاه معادلات جبری خطی تبدیل شده است. در نهایت با محاسبه جواب غیر بدیهی دستگاه معادلات ، فرکانس های طبیعی ارتعاش سازه بلند بدست آمده است. سازه مورد نظر در نرم افزار SAP-2000 مدل سازی شده و نتایج تحلیل به کمک روش ارائه شده، نتایج مدل سازی در نرم افزار و همچنین نتایج بدست آمده از روشهای سایر محققین با یکدیگر مقایسه شده است.*

واژه های کلیدی سازه بلند، تیر برشی- خمشی، فرم تضعیف شده، معادله انتگرالی، نیروی محوری، فرکانس طبیعی ارتعاش.

Dynamic Response Analysis of Tall Buildings under Axial Force Effects

M. Mohammadnejad		H. Haji kazemi

Abstract *In this paper, weak form integral equations is presented for dynamic response analysis of tall structures with variable stiffness and mass along the height under axial force. Through repetitive integration, the governing differential equation is converted into its weak form integral equation. The tall structure is modeled by a non-prismatic cantilever beam. By approximation of the mode shape function by a power series, the integral equation is converted into a system of linear algebraic equations. The natural frequencies of tall structure are calculated by determination of a non-trivial solution for system of equations. The analysis results are compared by those obtained from SAP-2000 software and other available references.*

Key Words Tall Structure, Shear-Bending beam, Weak form integral equation, Axial force, Natural frequency.

---

*تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۳/۱۸ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۵/۱ می‌باشد.

(۱) نویسندهٔ مسئول، دانشجوی دکتری سازه، گروه مهندسی عمران دانشگاه فردوسی مشهد.		Email: civil.persian@gmail.com

(۲) عضو هیات علمی گروه مهندسی عمران دانشگاه فردوسی مشهد.

مقدمه

رفتار تعداد زیادی از پدیده‌های طبیعی را می‌توان به کمک معادلات دیفرانسیل معمولی یا مشتق جزئی مدل‌سازی کرد. به عنوان مثال ارتعاش تیرهای الاستیک با خصوصیات جرم و سختی متغیّر به کمک معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی با ضرایب متغیر مدل می شود. روشهای تحلیل سازه بلند را می توان به دو دسته کلی ۱: روشهای تقریبی و ۲: روشهای تحلیل اجزا محدود دسته بندی نمود. جهت تحلیل تقریبی یک سازه بلند، از یک تیر کنسول با مقطع متغیر به عنوان جایگزین سازه اصلی استفاده می شود. مدلسازی سازه بلند توسط یک تیر جایگزین به کمک تئوری تقریبی تیر جایگزین (Replacement beam) انجام می شود. با حل معادله حاکم بر ارتعاش این تیر جایگزین، فرکانس های طبیعی ارتعاش سازه اصلی و توابع مد شکل محاسبه می شوند. بنابراین تحلیل تیر جایگزین به جای سازه اصلی دارای ساده سازی ها و تقریب هایی می باشد. روشهای تحلیل اجزا محدود بر پایه مدلسازی گسسته استوار است. این روش ها نیاز به حل همزمان هزاران معادله خطی به منظور ارائه نتایج عددی و کاربردی تحلیل سازه دارد. همچنین مدلسازی یک سازه بلند در نرم افزار تحلیل اجزا محدود بدلیل داشتن المان های سازه ای زیاد بسیار وقت گیر می باشد. بنابراین روش تحلیل اجزا محدود برای مراحل نهایی و تحلیل دقیق یک سازه بلند مناسب می باشد. این در حالی است که روشهای تقریبی تحلیل سازه، به دلیل سادگی و سرعت عمل بالا، در مراحل اولیه طراحی و تحلیل مقدماتی سازه کاربرد دارند. روش ارائه شده در این تحقیق یک دید روشن از تحلیل ارتعاش آزاد سازه بلند ارائه می کند. سادگی و دقت بالای روش ارائه شده در این تحقیق موجب می شود که در تحلیل تقریبی و مراحل مقدماتی طراحی یک سازه بلند (که نیازی به مدلسازی دقیق نرم افزاری وجود ندارد) قابل استفاده باشد. علاوه بر این، جهت بررسی میزان تأثیر پارامترهای مختلف سازه ای بر مشخصات استاتیکی و دینامیکی یک سازه بلند، استفاده از روشهای تحلیلی راحتتر و سرراست تر می باشد. با توجه به زمان اندک مورد نیاز جهت مدلسازی و محاسبات در روش ارائه شده ، این روش در تحلیل تقریبی سازه مفید واقع می شود. نتایج تحلیل تقریبی می تواند در جهت کاهش خطاهای مدلسازی دقیق سازه در نرم افزار تحلیل اجزا محدود، تخمین صحیح ابعاد اولیه المان های سازه ای و مشخصات مصالح مورد بررسی و ... مفید واقع گردد.

تاکنون تحقیقات زیادی در خصوص مدلسازی و تحلیل تقریبی سازه های بلند ارائه شده است. در سال ۲۰۱۲ قزاق و همکاران [1] یک تئوری اصلاح شده برای تفکیک یک سازه بلند دارای سختی خمشی و برشی به دو زیر سازه مجزا (یکی برشی و دیگری خمشی) ارائه کرده اند. در سال ۲۰۱۴ پارک و همکاران [2] یک مدل تحلیلی برای تحلیل دینامیکی سازه های بلند دارای سیستم سازه ای قاب–دیوار برشی ارائه کرده اند. یک سیستم قاب–دیوار از یک دیوار برشی با رفتار خمشی به عنوان هسته و یک قاب خمشی با رفتار برشی تشکیل می شود. در سال ۲۰۱۴ رهگذر و همکاران [3] فرکانس های طبیعی یک سازه بلند مرکب از قاب لوله ای و دیوار برشی را به کمک روش گالرکین و توابع B-Spline محاسبه کرده اند. در این تحقیق، معادله حاکم بر ارتعاش آزاد یک سازه بلند با سختی برشی_وسختی خمشی به کمک توابع B-Spline به فرم ماتریسی آن تبدیل شده است. در سال ۲۰۱۲ کامگار و همکاران [4] فرکانس طبیعی یک سازه بلند مرکب از قاب لوله ای، هسته برشی، کمربند خرپایی و مهاربازویی که دارای ناپیوستگی هایی در مقطع عرضی می باشد را محاسبه کرده اند . در این تحقیق فرض شده است سختی و جرم سازه به صورت پلکانی و ناگهانی در ارتفاع سازه کاهش می یابند، از این رو سازه بلند به n قسمت در ارتفاع تفکیک شده و برای هر قسمت سختی و جرم ثابت فرض شده است. با اعمال شرایط مرزی در محل فصل مشترک هر دو قطعه پی در پی، n معادله دیفرانسیل با ضرائب ثابت (متناظر با n قسمت

تفکیک شده) حاصل شده است. با حل این معادلات به روش سری توانی (power series solution) فرکانس های طبیعی ارتعاش سازه بلند محاسبه شده است. در سالهای ۲۰۱۲ و ۲۰۱٤ ملکی نژاد و همکاران [5-6] روشهایی بر مبنای روابط انرژی برای محاسبه فرکانس های طبیعی و توابع مد شکل ارتعاش سازه های بلند دارای سیستم قاب لوله ای، هسته برشی و کمربند خرپایی ارائه کرده اند. در این تحقیق، سازه قاب محیطی به کمک یک تیر کنسول با مقطع تیر-جعبه و سیستم مرکب کمربند خرپایی-مهار بازویی به کمک یک فنر دورانی مستقر در مکان کمربند مدلسازی شده است. در سال ۲۰۱۳ زالکا [7] روابطی برای تحلیل پیچشی سازه های بلند نامتقارن در پلان با سیستم باربر جانبی قاب خمشی، دیوار برشی و هسته مرکزی ارائه کرده است. در سال ۲۰۱۵ محمدنژاد [8] و در سال ۲۰۱٤ محمدنژاد و همکاران [9] فرکانس های طبیعی ارتعاش تیرهایی با خصوصیات جرم و سختی متغیر در طول تیر و تحت تأثیر نیروی محوری و اینرسی دورانی را به کمک معادلات انتگرالی تضعیف شده محاسبه کرده اند. در این تحقیق، معادله حاکم بر ارتعاش تیرهای مختلف از طریق انتگرال گیری های پی در پی به فرم تضعیف شده آن تبدیل شده است. در سال ۲۰۱۵ صفاری و همکاران [10] فرکانس ارتعاشی سازه های بلند دارای سختی خمشی و برشی را به کمک معادلات انتگرالی تضعیف شده محاسبه نموده اند. در این تحقیق، سازه بلند با رفتار برشی و خمشی به دو سازه مجزا یکی با رفتار خمشی و دیگری با رفتار برشی تفکیک شده است. معادلات حاکم بر ارتعاش تیر برشی و تیر خمشی به کمک معادلات انتگرالی تضعیف شده حل شده و فرکانس های ارتعاش برشی و ارتعاش خمشی سازه محاسبه شده است. فرکانس نهایی سازه به کمک ترکیب فرکانس های برشی و خمشی محاسبه شده است. در سال ۲۰۱۲ صفاری و همکاران [11] فرکانس های طبیعی ارتعاش و بار کمانشی تیر برنولی با خصوصیات سختی و جرم متغیر در طول تیر و تحت اثر نیروی محوری متغیر را به کمک معادلات انتگرالی تضعیف شده محاسبه کرده اند. در این تحقیق فرکانس های طبیعی ارتعاش و بار کمانشی تیرهایی با شرایط تکیه گاهی مختلف محاسبه شده است. تحقیق های زیادی در زمینه تحلیل ارتعاش آزاد سازه های بلند به کمک روشهای مختلف ارائه شده است [12-22] اما در تعداد کمی از این تحقیقات اثر نیروی محوری بر روی رفتار ارتعاشی سازه بلند بررسی شده است. از آنجایی که نیروی محوری موجب کاهش سختی سازه می گردد در نظر گرفتن این پارامتر در محاسبه فرکانس طبیعی ارتعاش امری ضروری به نظر می رسد.

در تحقیق پیش رو، فرکانسهای طبیعی ارتعاش یک سازه بلند دارای جرم و سختی متغیر در ارتفاع تحت تأثیر نیروی محوری محاسبه شده است. معادله حاکم بر ارتعاش از طریق چهار مرتبه انتگرال گیری پی در پی به فرم تضعیف شده آن تبدیل می شود. اکثر روشهای تحلیلی ارائه شده تاکنون جهت تحلیل ارتعاش آزاد سازه بلند، سختی و جرم سازه را در ارتفاع یکنواخت فرض کرده اند. در روش ارائه شده در این تحقیق، خصوصیات سختی و جرم سازه در ارتفاع متغیر فرض شده است. که این نوع مدلسازی به واقعیت موجود در سازه ها نزدیک تر می باشد. همچنین، تحلیل ارتعاش آزاد یک تیر با مقطع ثابت (که متناظر با مدل یک سازه بلند با خصوصیات سختی و جرم ثابت می باشد) به مراتب ساده تر از تحلیل یک تیر با مقطع غیر منشوری (که متناظر با مدل یک سازه بلند با خصوصیات سختی و جرم متغیر است) می باشد. در اکثر روشهای ارائه شده تاکنون، سازه بلند که دارای یک محیط پیوسته با بینهایت درجه آزادی می باشد به N سازه یک درجه آزادی معادل، متناظر با N مد ارتعاشی تبدیل شده و برای هر مد ارتعاشی، یکبار معادله حاکم حل شده و سپس نتایج تحلیل بایکدیگر ترکیب شده

اند. دو ایراد اساسی بـه ایـن ایـده وارد اسـت، نخسـت اینکه محیط پیوسته به یک محیط گسسـته تبـدیل شـده است و دوم اینکه، نیاز به N بار حل معادلـه حـاکم بـر ارتعاش می باشد. در حالی کـه در روش پـیش رو، بـه کمـک مدلسـازی پیوسـته سـازه بلنـد (continuum modelling)،که به واقعیت سازه نزدیک تر اسـت، تنهـا یک بار معادله حاکم بر ارتعاش سیستم پیوسته حل شده و با انتخاب یک P مناسب در رابطه (٢٤) به هـر تعـداد مد ارتعاشی که مد نظر باشد دسترسی داریم و نیازی به ترکیب جواب ها نیز نخـواهیم داشـت. تـاکنون جهـت تبدیل معادله حاکم بر ارتعاش آزاد سـازه بلنـد بـه یـک معادله قابل حل، روشهای حل بسیار طولانی همـراه بـا محاسبات ریاضی زیاد ارائه شده است. در حالی کـه در این تحقیق تنها از طریق ٤ مرتبه انتگرال گیـری پـی در پی از معادله حاکم به یک معادله قابل حل دسترسی پیدا کرده ایم. که این مساله، سادگی روش تحقیـق را نشـان می دهد. در معدود روشهای ارائـه شـده تـاکنون بـرای تحلیل ارتعاش آزاد سازه هایی با خصوصیات سـختی و جرم متغیر در ارتفاع، روش حل بدین صورت می باشد که سازه غیر منشوری به n قسمت تقسیم شده و فـرض شده است سختی و جرم سازه در هر قسمت ثابت مـی باشد و شرایط مرزی بین هر دو قطعه پی در پـی ارضـا شده است. بنابراین نیاز به حل n معادلـه دیفرانسـیل بـا ضرائب ثابت متناظر با n قسمت سـازه وجـود دارد. در حالی که در روش تحقیق پیش رو نیازی به این تقسـیم بندی وجود نداشته و برای تغییرات سختی و جرم سازه در ارتفاع محدودیتی وجود ندارد و تنها نیاز به بررسـی شرایط مرزی در پای سازه و بام سازه می باشد. که ایـن نکته مراحل حل مساله را به مراتب ساده تر کرده است.

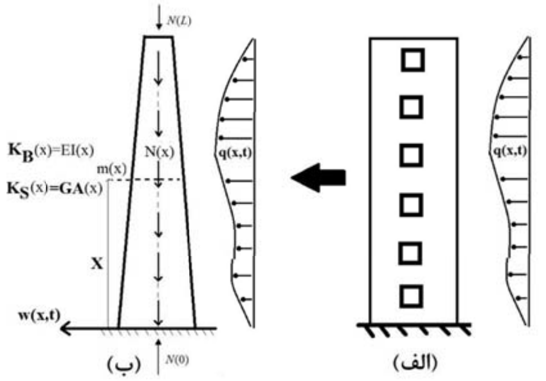
محاسبه فرکانس طبیعی ارتعاش سازه بلند

جهت محاسبه فرکانس های طبیعـی ارتعـاش، در ابتـدا سازه بلند توسط یک تیـر کنسـول بـا سـختی خمشـی، سختی برشی و جرم واحد طول متغیر در ارتفـاع تحـت تأثیر نیروی محوری ناشی از وزن سـازه مدلسـازی مـی شود. توابع سختی و جرم تیر جایگزین به کمک روابـط تقریبی محاسبه می شود. معادله حاکم بر ارتعـاش یـک تیر برشی–خمشی(Shear-Bending beam) غیرمنشوری تحت تأثیر نیروی محـوری در نظـر گرفتـه شـده و بـه کمک معادلات انتگرالی تضعیف شـده، فرکـانس هـای طبیعی ارتعاش این تیرکه در حقیقت فرکانس های سازه اصلی می باشند، محاسبه می شود. تیر برشـی–خمشـی یک حالت خاص از تیـر تیموشـنکو مـی باشـد کـه در معادله حاکم بر ارتعـاش آن از اثـرات اینرسـی دورانـی صرفنظر شده اسـت. در سـال ٢٠١٣ کامگـار و رهگـذر [23] در تحقیقی نشان داده اند که اثر اینرسی دورانی بر فرکانس طبیعی سازه بلند ناچیز می باشد.

تبدیل معادله حاکم به فرم تضعیف شده. با استفاده از روش انرژی و اصل همیلتـون (Hamilton's principle) معادله حاکم بر ارتعاش سـازه بلنـد بـا در نظـر گـرفتن اثرات تغییر شکل برشی، تغییر شکل خمشـی و نیـروی محوری به صورت زیر محاسبه شده است [4]:

$$\frac{\partial}{\partial X}\left[K_S(X)\frac{\partial}{\partial X}W(X,t)\right]+\frac{\partial}{\partial X}\left[N(X)\frac{\partial}{\partial X}W(X,t)\right]-\frac{\partial^2}{\partial X^2}\left[K_B(X)\frac{\partial^2}{\partial X^2}W(X,t)\right]-m(X)\frac{\partial^2}{\partial t^2}W(X,t)+q(X,t)=0,\quad 0<X<H \tag{1}$$

در رابطـه (١)، $m(X), K_S(X), K_B(X), W(X,t)$، $H, N(X),$ و $q(X,t)$ به ترتیب تابع جابجـایی جـانبی سازه، تابع سختی خمشی، تابع سختی برشی، تابع جـرم واحد طول سازه، تابع نیروی محوری سازه، ارتفاع سازه و تابع بارگـذاری جـانبی سـازه مـی باشـند (شـکل ١). جهت بررسی ارتعاش آزاد $q(X,t)=0$ در نظر گرفتـه می شود.



شکل ۱ مدلسازی تقریبی سازه بلند توسط تیر جایگزین تحت اثر نیروی محوری. الف) سازه اصلی، ب) تیر جایگزین سازه اصلی

با فرض یک ارتعاش هارمونیک برای سازه، تابع جابجایی جانبی تیر به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$W(X,t)=w(X)e^{i\Omega t} \qquad (۲)$$

در رابطهٔ (۲)، $w(X)$ و Ω به ترتیب تابع مد شکل ارتعاش و فرکانس طبیعی ارتعاش سازه می باشند. با جایگذاری رابطه (۲) در معادله (۱)، یک معادله تک متغیره بر حسب پارامتر مکان X به صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{d}{dX}\left[K_S(X)\frac{d}{dX}w(X)\right]+\frac{d}{dX}\left[N(X)\frac{d}{dX}w(X)\right]-\frac{d^2}{dX^2}\left[K_B(X)\frac{d^2}{dX^2}w(X)\right]+\Omega^2 m(X)w(X)=0,\quad 0<X<H \qquad (۳)$$

به منظور سهولت محاسبات، تغیر متغیر $x=\frac{X}{H}$ در نظر گرفته شده و در رابطه (۳) جایگذاری می شود:

$$\frac{d}{dx}\left[H^2K_S(x)\frac{d}{dx}w(x)\right]+\frac{d}{dx}\left[H^2N(x)\frac{d}{dx}w(x)\right]-\frac{d^2}{dx^2}\left[K_B(x)\frac{d^2}{dx^2}w(x)\right]+\Omega^2H^4m(x)w(x)=0,\quad 0\le x\le 1 \qquad (۴)$$

معادله (٤) معادله ارتعاش آزاد سازه بلند بر حسب متغیر بدون بعدx می باشد. به منظور تبدیل معادلـه (٤) به فرم تضعیف شده آن، از طرفین معادله (٤) دو مرتبـه نسبت به پارامتر x در بـازه 0 تـا x انتگـرال گیـری مـی شود. نتیجه، معادلات انتگرالی زیر می باشند:

$$H^2K_S(x)\frac{d}{dx}w(x)+H^2N(x)\frac{d}{dx}w(x)-\frac{d}{dx}\left[K_B(x)\frac{d^2}{dx^2}w(x)\right]+\Omega^2H^4\int_0^x m(s)w(s)ds=C_1 \qquad (۵)$$

$$H^2K_S(x)w(x)+H^2N(x)w(x)+\int_0^x\left[\begin{array}{l}\Omega^2H^4(x-s)m(s)-\\ H^2K_S'(s)-H^2N'(s)\end{array}\right]w(s)ds-K_B(x)\frac{d^2}{dx^2}w(x)=C_1x+C_2 \qquad (٦)$$

همچنین دو مرتبـه انتگـرال گیـری از معادلـه (٦) نسبت به پارامتر x در بازه 0 تا x معادلات انتگرالی زیـر را نتیجه می دهد:

$$\int_0^x\left[\begin{array}{l}H^2K_S(s)+H^2N(s)-\\ H^2(x-s)K_S'(s)-\\ H^2(x-s)N'(s)-K_B''(s)+\\ \frac{\Omega^2H^4}{2}(x-s)^2m(s)\end{array}\right]w(s)ds-K_B(x)\frac{d}{dx}w(x)+K_B'(x)w(x)=\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3 \qquad (۷)$$

$$\int_0^x h_1(x,s)w(s)ds-K_B(x)w(x)=\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4 \qquad (۸)$$

در رابطه (۸) تابع $h_1(x,s)$به صورت زیر محاسبه می شود:

$$h_1(x,s) = H^2(x-s)K_S(s) + H^2(x-s)N(s) - \frac{H^2}{2}(x-s)^2 K_S'(s) - \frac{H^2}{2}(x-s)^2 N'(s) + 2K_B'(s) - (x-s)K_B''(s) + \frac{\Omega^2 H^4}{6}(x-s)^3 m(s)$$

(۹)

معادله (۸) فرم تضعیف شده معادله حاکم بر ارتعاش سازه بلند با در نظر گرفتن اثرات نیروی محوری می باشد. در معادله (۸) پارامترهای C_4, C_3, C_2, C_1 ثابتهای انتگرال گیری می باشند که به کمک شرایط مرزی اساسی و هندسی حاکم بر ارتعاش سازه بلند محاسبه می شوند. در قسمت بعد، از معادلات (۵) الی (۸) جهت تعیین ثابت های انتگرال گیری استفاده می شوند.

شرایط مرزی. شرایط مرزی اساسی در تکیه گاه تیر به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\begin{cases} x=0 & w(0)=0 \\ x=0 & \dfrac{dw}{dx}(0)=0 \end{cases}$$

(۱۰) و (۱۱)

شرایط مرزی هندسی بسته به نوع سیستم باربر جانبی و در نظر گرفتن یا عدم در نظر گرفتن پارامترهایی نظیر نیروی محوری، اینرسی دورانی، تغییر شکل های برشی و ...، متغیر می باشد. در اینجا شرایط مرزی هندسی در انتهای آزاد تیر تحت تأثیر نیروی محوری به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\begin{cases} x=1 & -H^2K_S(x)\dfrac{d}{dx}w(x) - H^2N(x)\dfrac{d}{dx}w(x) + \dfrac{d}{dx}\left[K_B(x)\dfrac{d^2}{dx^2}w(x)\right]=0 \\ x=1 & K_B(x)\dfrac{d^2}{dx^2}w(x)=0 \end{cases}$$

(۱۲) و (۱۳)

رابطه (۱۲) مربوط به وضعیت نیروی برشی در انتهای آزاد تیر تحت تأثیر نیروی محوری می باشد. در این رابطه، ترم سوم همان نیروی برشی کلاسیک تیر می‌باشد، ترم دوم اثر نیروی محوری و ترم اول اثر سختی برشی بر روی نیروی برشی تیر می باشند. همچنین رابطه (۱۳) مربوط به وضعیت ممان خمشی در انتهای آزاد تیر می باشد. با اعمال شرایط مرزی (۱۰) الی (۱۳) در روابط (۵) الی (۸)، ثابت های انتگرال گیری محاسبه شده و در رابطه (۸) جایگذاری می شود. نتیجه، معادله انتگرالی زیر بر حسب تابع مد شکل ارتعاش $w(x)$ می‌باشد:

$$\int_0^x h_1(x,s)w(s)\,ds + \int_0^1 h_2(x,s)w(s)\,ds - K_B(x)w(x) = 0$$

(١٤)

در رابطه (١٤) تابع $h_2(x,s)$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$h_2(x,s) = -\frac{\Omega^2 H^4}{6}x^3 m(s) - \frac{\alpha_1}{2}x^2 g_1(s) - \frac{\alpha_2}{2}x^2 g_2(s)$$

(۱۵)

در رابطه (۱۵) توابع $g_1(s)$ و $g_2(s)$ و پارامترهای α_1 و α_2 به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{cases} g_1(s) = \Omega^2 H^4(1-s)m(s) - H^2K_S'(s) - H^2N'(s) - \Omega^2H^4 m(s) \end{cases}$$

(١٦)

$$\begin{cases} g_2(s) = \dfrac{H^2}{K_B(1)}(1-s)K_S(s) + \dfrac{H^2}{K_B(1)}(1-s)N(s) - \dfrac{H^2}{2K_B(1)}(1-s)^2K_S'(s) \\ -\dfrac{H^2}{2K_B(1)}(1-s)^2N'(s) + \dfrac{2K_B'(s)}{K_B(1)} - \dfrac{(1-s)K''(s)}{K_B(1)} + \dfrac{\Omega^2H^4}{6K_B(1)}(1-s)^3m(s) \\ -\dfrac{\Omega^2H^4}{6K_B(1)}m(s) \end{cases}$$

(۱۷)

$$\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{2K_B(1)}{H^2K_S(1)+H^2N(1)+2K_B(1)}\\ \alpha_2=\dfrac{2K_B(1)H^2K_S(1)+2K_B(1)H^2N(1)}{H^2K_S(1)+H^2N(1)+2K_B(1)}\end{cases}$$

(۱۸)

تیر کنسول با جرم متمرکز در انتهای آزاد. در این قسمت فرض می‌شود که یک جرم متمرکز در انتهای تیر کنسول وجود دارد. این فرض جهت تحلیل سازه‌های بلند که دارای جرم متمرکز قابل توجّه در انتهای آزاد خود می‌باشند (نظیر مخازن اب)، قابل استفاده می‌باشد. روش تحلیل مشابه قسمت قبل می‌باشد با این تفاوت که در این حالت نیروی برشی در انتهای تیر کنسول و در محل جرم متمرکز برابر صفر نیست. سایر شرایط مرزی تغییر نمی‌کنند. با صرف نظر از اثرات سختی برشی، در این حالت شرایط مرزی به صورت زیر تعریف می‌شوند [24]:

$$\begin{cases}x=0, & w(0)=0,\\ x=0, & \dfrac{dw}{dx}(0)=0\\ x=1, & -H^2N(x)\dfrac{d}{dx}w(x)+\\ & \dfrac{d}{dx}\left[K_B(x)\dfrac{d^2}{dx^2}w(x)\right]=-\overline{M}\Omega^2w(1)\\ x=1, & K_B(x)\dfrac{d^2}{dx^2}w(x)=0\end{cases}$$

(۱۹)

در روابط (۱۹) $\overline{M}$ جرم متمرکز در انتهای آزاد تیر کنسول می‌باشد. با اعمال شرایط مرزی فوق، ثابت‌های انتگرال‌گیری معادله(۸) تعیین می‌شوند. با جایگذاری ثابت‌های انتگرال‌گیری در معادله(۸) یک معادله انتگرالی به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\int_0^x h_1(x,s)w(s)ds+\int_0^1 h_2(x,s)w(s)ds$$
$$-K_B(x)w(x)=0$$

(۲۰)

در معادله (۲۰) تابع $h_2(x,s)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$h_2(x,s)=\left[-\frac{\alpha_3}{6}x^3-\frac{\alpha_5}{2}x^2\right]g_4(s)-x^2g_3(s)-$$
$$\frac{\alpha_4}{2}x^2m(s)$$

(۲۱)

در رابطه فوق:

$$\begin{cases}g_3(s)=H^2(1-s)N(s)+(1-s)K_B''(s)-\\ \dfrac{\Omega^2H^4}{6}(1-s)^3m(s)-2K_B'(s)-\\ \dfrac{H^2}{2}(1-s)^2N'(s)\\ g_4(s)=6g_3(s)+3H^2N'(s)+\\ \left(\dfrac{3H^3N(1)-6HK_B(1)}{\overline{M}}+3\Omega^2H^4(1-s)\right)m(s)\end{cases}$$

(۲۲)

و

$$\alpha_3=\frac{\overline{M}\Omega^2H^3}{6K_B(1)-2\overline{M}\Omega^2H^3-3H^2N(1)},$$
$$\alpha_4=-\frac{2K_B(1)H}{\overline{M}},$$
$$\alpha_5=\frac{6K_B(1)+\overline{M}\Omega^2H^3}{6\overline{M}\Omega^2H^3+9H^2N(1)-18K_B(1)}$$

(۲۳)

در نظر گرفته شده اند. تابع $h_1(x,s)$ از رابطـه (۹) محاسبه می شود.

تبدیل معادله انتگرالی به دستگاه معادلات جبری خطی. تنها مجهول معادلات انتگرالی (۱٤) و (۲۰) تابع مد شکل ارتعاش $w(s)$ می باشد. این تابع توسط سری توانی زیر تقریب زده می شود:

$$w(x)=\sum_{r=0}^{P}c_rx^r \qquad (۲٤)$$

در این سری C_r ضرایب مجهول سری هستند و P یک عدد صحیح مثبت می باشد. دقت نتایج تحلیل بستگی به مقدار P انتخاب شده دارد. با در نظر گرفتن یک P بزرگتر تعداد جملات بیشتری از سری (۲٤) در

نظر گرفته می شود. این مسئله موجب افزایش دقت نتایج می شود. با جایگذاری سری (٢٤) در معادلات انتگرالی (١٤) و(٢٠) و ضرب طرفین معادله در x^m و انتگرال گیری از معادله حاصل در بازه 0 تا 1 نسبت به پارامتر x، دستگاه معادلات جبری خطی زیر بدست می آید:

$$\sum_{r=0}^{P}\left[G(m,r)+H_1(m,r)+H_2(m,r)\right]c_r = 0 \qquad m = 0,1,2,...,P \tag{٢٥}$$

در رابطــه (٢٥) توابــع $G(m,r)$، $H_1(m,r)$ و $H_2(m,r)$ به صورت زیرمحاسبه می شوند:

$$\begin{cases} G(m,r) = -\int_0^1 x^{r+m}K_B(x)dx \\ H_1(m,r) = \int_0^1\int_0^x h_1(x,s)s^r x^m dsdx \\ H_2(m,r) = \int_0^1\int_0^1 h_2(x,s)s^r x^m dsdx \end{cases} \tag{٢٦}$$

سیستم دستگاه معادلات جبری خطی (٢٥) را میتوان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی نمود:

$$[A]_{(P+1)\times(P+1)}[C]_{(P+1)\times 1} = [0]_{(P+1)\times 1} \tag{٢٧}$$

در رابطه (٢٧) $[A]$ماتریس ضرایب و $[C]$ماتریس مجهولات می باشند. تنها پارامتر مجهول در ماتریس $[A]$، فرکانس طبیعی ارتعاش سازه می باشد. با محاسبه جواب غیر بدیهی دستگاه معادلات(٢٧) که با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس $[A]$بدست می آید، معادله فرکانسی تیر محاسبه می شود . ریشه های معادله فرکانسی، فرکانس های طبیعی ارتعاش سازه اصلی می باشند. معادله فرکانسی یک تابع چند جمله ای از درجه $2(P+1)$می باشد بنابراین با در نظر گرفتن Pبزرگتر تعداد ریشه های بیشتری (فرکانس های مدهای بالاتر) قابل محاسبه می باشد. همچنین با در نظر گرفتن P بزرگتر دقت نتایج تحلیل افزایش می یابد.

تابع مد شکل ارتعاش

پس از محاسبه فرکانس های طبیعی ارتعاش سازه به کمک روش تشریح شده در قسمت قبل، می توان توابع مد شکل ارتعاش را محاسبه نمود. از آنجایی که تابع مد شکل ارتعاش به کمک سری توانی زیر تقریب زده شده است:

$$w(x) = \sum_{r=0}^{P} c_r x^r \tag{٢٨}$$

جهت محاسبه تابع مد شکل ارتعاش نیاز به محاسبه ثابت های $c_r\ _{r=0,1,...,P}$ می باشد. پس از محاسبه فرکانس طبیعی ارتعاش مد (i) ام Ω_i و جایگذاری آن در دستگاه معادلات جبری خطی (٢٧) دستگاه معادلات زیر بدست می آید:

$$[A_i]_{(P+1,P+1)}[C_{r_i}]_{(P+1,1)} = 0 \tag{٢٩}$$

در رابطه (٢٩) $(C_0)_i = 1$ در نظر گرفته شده و جایگذاری می شود. نتیجه دستگاه معادلات جبری زیر می باشد:

$$\overline{[A_i]}_{(P+1,P)}\overline{[C_{r_i}]}_{(P,1)} = \overline{[B_i]}_{(P+1,1)} \tag{٣٠}$$

در رابطــه (٣٠) مــاتریس هــای $\overline{[B_i]}_{(P+1,1)}$، $\overline{[C_{r_i}]}_{(P,1)}$ و $\overline{[A_i]}_{(P+1,P)}$ به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\overline{[C_{r_i}]}_{(P,1)} = \begin{bmatrix} (C_1)_i \\ (C_2)_i \\ \vdots \\ (C_P)_i \end{bmatrix} \quad \text{and}$$

$$\overline{[B_i]}_{(P+1,1)} = \begin{bmatrix} -(A_{1,1})_i \\ -(A_{2,1})_i \\ \vdots \\ \vdots \\ -(A_{P+1,1})_i \end{bmatrix}$$

$$\overline{[A_i]}_{(P+1,P)} = \begin{bmatrix} (A_{1,2})_i & \cdots & (A_{1,P+1})_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (A_{P+1,2})_i & \cdots & (A_{P+1,P+1})_i \end{bmatrix} \tag{٣١}$$

با حل دستگاه معادلات (۳۰) ثابت های C_{r_i} محاسبه می شوند.

نیروهای داخلی

در آنالیز مودال سازه ها، برای هر مد ارتعاش یک بار معادل تعیین می شود. نیروی جانبی معادل در مد (i) ام به صورت زیر محاسبه می شود(شکل ۲)[25]:

$$f_i(X)=\frac{\int_0^H m(X)w_i(X)dX}{\int_0^H m(X)w_i^2(X)dX}m(X)w_i(X)S_{Ai}$$

or

$$f_i(x)=\frac{\int_0^1 m(x)w_i(x)dx}{\int_0^1 m(x)w_i^2(x)dx}m(x)w_i(x)S_{Ai}$$

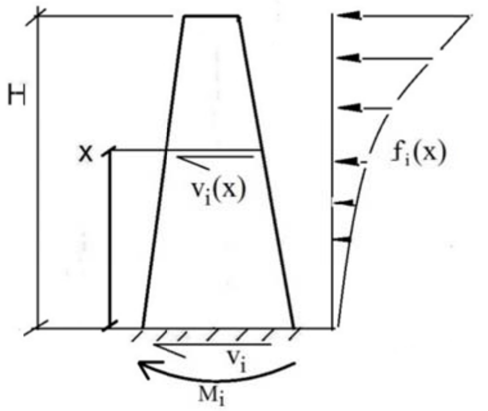
(۳۲)

در رابطه (۳۲) S_{Ai} شتاب طیفی متناظر با مد i ام ارتعاش (که وابسته به زمان تناوب ارتعاش، میرائی سازه و شتاب ماکزیموم زمین می باشد) و H ارتفاع سازه می باشد. با انتگرال گیری از رابطه (۳۲) بین X و H (یا بین x و ۱) نیروی برشی موثر بر مقطع عرضی سازه در مد i ام بدست می آید (شکل ۲). نتیجه انتگرال گیری از رابطه (۳۲) به صورت زیر می باشد:

$$V_i(X)=\int_X^H f_i(X)dX \quad \text{or} \quad V_i(x)=H\int_x^1 f_i(x)dx \quad (۳۳)$$

با قرار دادن x=0 در رابطه (۳۳) نیروی برشی کل که به عنوان برش پایه ساختمان شناخته می شود محاسبه می شود. لنگر خمشی پای سازه به صورت زیر محاسبه می شود (شکل ۲):

$$M_i=\int_0^H Xf_i(X)dX \quad \text{or} \quad M_i=H^2\int_0^1 xf_i(x)dx \quad (۳٤)$$



شکل ۲ بار جانبی معادل $f_i(x)$ ، نیروی برشی موثر بر مقطع عرضی سازه $V_i(x)$ و نیروی برش پایه V_i و لنگر خمشی پای سازه M_i در مد(i) ام ارتعاش

مثال های عددی

سازه بلند با سیستم دیوار برشی. در این مثال ۵ فرکانس ابتدایی یک سازه بلند ۲۷ طبقه با ٧٦ متر ارتفاع و جرم متمرکز در انتهای آزاد محاسبه می شود. سیستم باربر جانبی این سازه دیوار برشی با مقطع متغیر در ارتفاع سازه می باشد. از آنجایی که سیستم باربر جانبی تنها دارای سختی خمشی می باشد این سازه توسط یک تیر کنسول خمشی با جرم متمرکز در انتهای آزاد مدل می شود. از اثرات برش و اینرسی دورانی صرف نظر شده است. تابع نیروی محوری ناشی از وزن سازه در نظر گرفته شده است. مدول الاستیسیته $E=2.8\times10^7\ \frac{kN}{m^2}$ و جرم متمرکز $\overline{M}=306.122\,ton$ در نظر گرفته شده اند. جدول (۱) چگونگی تغییرات جرم و سختی سازه را در ارتفاع نشان می دهد.

به کمک اطلاعات جدول (۱) تابع سختی خمشی $K_B(x)=EI(x)$ به صورت زیر درون یابی شده است:

$$K_B(x)=EI(x)=2.8\times10^7\times (932.8x^2-1975.9x+2142.7) \quad (kN\text{-}m^2)$$
$$0\le x\le 1$$

(۳٤)

جدول ۱ تغییرات سختی و جرم سازه مثال ۵-۱ در ارتفاع

ارتفاع	0	5.35	15.25	21.25	m
جرم واحد طول	350.102	414.388	408.776	393.377	$\frac{ton}{m}$
ممان اینرسی	2156.5	2003.31	1786.62	1615.08	m^4
ارتفاع	33.85	43.15	52.45	76	m
جرم واحد طول	381.171	362.653	346.633	355.361	$\frac{ton}{m}$
ممان اینرسی	1177.18	1333.32	1205.311	1099.57	m^4

جدول ۲ پنج فرکانس اول سازه مثال ۵-۱

		Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
روش این مقاله	P = 3	6.815	39.56	114.96	552.56	1109
	P = 4	6.814	39.39	110.45	234.29	1071
	P = 5	6.814	39.38	108.48	221.78	411
	P = 8	6.814	39.38	108.3	211.38	350.4
	P = 10	6.814	39.38	108.26	211.3	348.93
	P = 12	6.814	39.38	108.257	211.3	348.91
SAP – 2000		6.7759	37.21	98.276	184.73	324.05

با توجه به تغییرات ناچیز جرم واحد طول در ارتفاع، جرم واحد طول تیر جایگزین برابر میانگین مقادیر ارائه شده در جدول (۱) و برابر $m(x) = m_{ave} = 380.14\frac{ton}{m}$ در نظر گرفته شده است. همچنین تابع نیروی محوری ناشی از وزن جرم متمرکز در انتهای آزاد و جرم توزیع شده در ارتفاع سازه به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$N(x) = \overline{M}\times g + mgL(1-x) = 3001.83 + 283301.6158(1-x) \quad (kN)$$

(۳۵)

پنج فرکانس اول سازه مطابق روش ارایه شده در این مقاله محاسبه شده است. سازه مورد نظر در نرم افزار SAP-2000 نیز مدل سازی شده و نتایج تحلیل و مدل سازی در نرم افزار در جدول (۲) ارائه شده است. جهت در نظر گرفتن اثرات نیروی محوری بر فرکانس طبیعی ارتعاش سازه در تحلیل نرم افزار، ابتدا یک آنالیز استاتیکی غیر خطی با در نظر گرفتن آثار $P-\Delta$ انجام شده و از ماتریس سختی اصلاح شده در انتهای آنالیز $P-\Delta$ جهت انجام آنالیز مودال و محاسبه فرکانس ها استفاده شده است.

طبق رابطه (٢٤)، تابع مد شکل ارتعاش به کمک سری توانی $w(x)=\sum^{p} c_r x^r$ تقریب زده شده است. در این روش انتخاب P مناسب به عهده کاربر می باشد. با انتخاب P بزرگتر تعداد جملات بیشتری از سری توانی در نظر گرفته می شود که این مساله موجب افزایش دقت نتایج تحلیل می شود. به طوری که با در نظر گرفتن P=3 (در نظر گرفتن چهار جمله اول سری) فرکانس های اول و دوم سازه همگرا شده اند که نشان از همگرایی سریع روش ارائه شده می باشد. در ازای P=3 فرکانس مد سوم ارتعاش 17% با جواب تحلیل اجزا محدود اختلاف دارد، در حالی که با افزایش P و

در نظر گرفتن P=5 فرکانس مد سوم همگرا شده و این اختلاف به 10% کاهش پیدا کرده است. . فرکانس مد چهارم با P=8 و فرکانس مد پنجم ارتعاش با P=10 همگرا شده اند.

سازه بلند با سختی برشی. در این قسمت یک سازه بلند ۲۵ طبقه با سیستم قاب محیطی تو در تو که پیش از این توسط سایر محققین بررسی شده است به کمک روش ارائه شده در این تحقیق تحلیل می گردد. سختی خمشی قاب محیطی خارجی و داخلی به ترتیب برابر $\left(K_B\right)_o = 35.2872\times10^9\ \text{kN.m}^2$ و $\left(K_B\right)_i = 7.5538\times10^9\ \text{kN.m}^2$ در نظر گرفته شده است. سختی برشی ، جرم واحد طول سازه و ارتفاع سازه به ترتیب برابر $K_S = 3.9888\times10^7\ \text{kN}$ ، $m = 3385.728\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}}$ و H=75.9 m در نظر گرفته شده است. دو فرکانس طبیعی اول ارتعاش سازه محاسبه شده و در جدول (۳) با نتایج سایر محققین مقایسه شده است.

بررسی تأثیر تغییر سختی برشی و سختی خمشی بر فرکانس طبیعی ارتعاش. در این مثال یک سازه بلند ۷۰ طبقه با سیستم باربر جانبی قاب محیطی مرکب شده با دیوار برشی به عنوان سازه مبنا معرفی می گردد. مشخصات سازه ای سیستم باربر جانبی سازه مبنا به شرح زیر می باشد:

سختی برشی معادل $K_S = 77.56\times10^8\ \text{kN}$، سختی خمشی معادل $K_B = 2.61\times10^{13}\ \text{kN}-\text{m}^2$، ارتفاع سازه $H = 210\ \text{m}$، جرم واحد طول $m = 681408\ \text{kg.s}^2/\text{m}^2$. سه فرکانس اول سازه مبنا مطابق روش ارائه شده در این تحقیق به شرح زیر محاسبه شده است:

$$\Omega_{1bs} = 1.1041\frac{\text{rad}}{\text{sec}}, \qquad \Omega_{2bs} = 4.2\frac{\text{rad}}{\text{sec}}, \qquad \Omega_{3bs} = 9.7388\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \tag{۳۶}$$

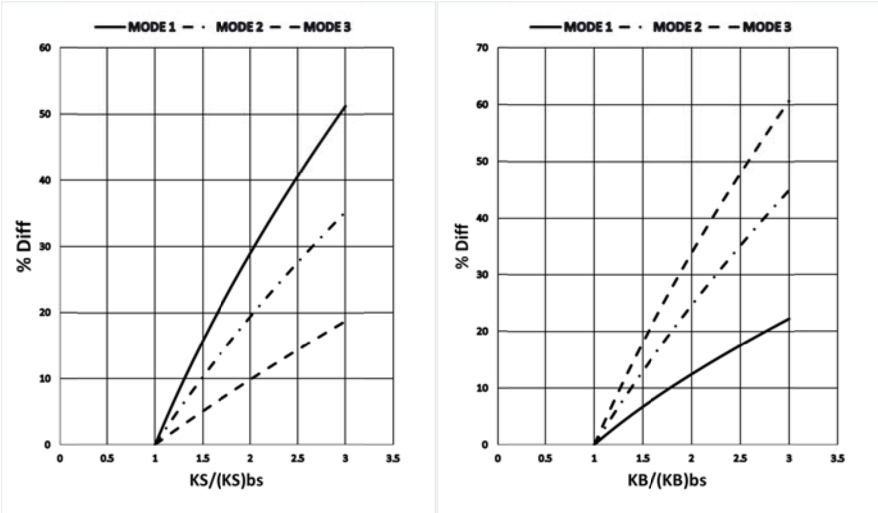
در رابطه (۳۷) زیرنویس "bs" به معنای سازه مبنا می باشد. به منظور بررسی تأثیر تغییر سختی برشی، سختی خمشی، جرم و ارتفاع سازه بر فرکانس های طبیعی ارتعاش، نسبت های $\frac{K_B}{(K_B)_{bs}}, \frac{K_S}{(K_S)_{bs}}, \frac{m}{(m)_{bs}}, \frac{H}{(H)_{bs}}$ بین ۱ تا ۳ تغییر داده می شود. در این نسبت ها K_B, K_S, m, H مشخصات سازه جدید می باشند. فرکانس های سازه جدید به صورت $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ در نظر گرفته می شود. اثر تغییر پارامترهای سختی برشی، سختی خمشی، جرم و ارتفاع سازه بر فرکانس طبیعی ارتعاش سازه مبنا به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\text{Diff} = \left(\frac{\Omega - \Omega_{bs}}{\Omega_{bs}}\right)\times100 \quad \% \tag{۳۷}$$

نتایج تحلیل در اشکال (۳) و (٤) ارائه شده است.

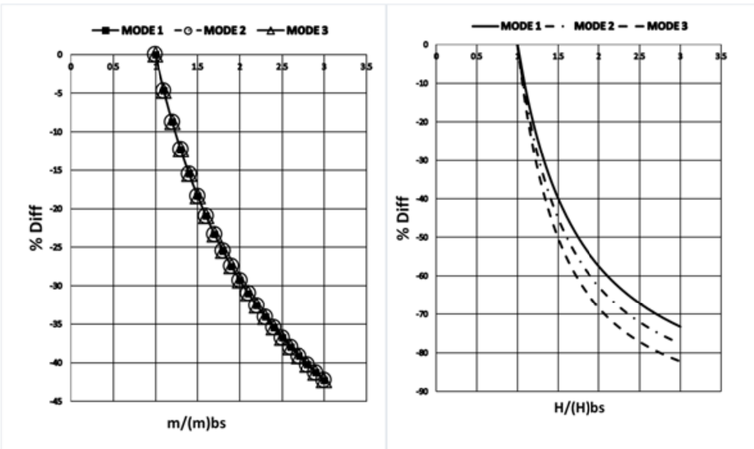
جدول ۳ دو فرکانس طبیعی اول ارتعاش سازه مثال ۵-۲

	روش ارائه شده	Malekinejad and Rahgozar,2014	Youlin, 1984 (Top displacemet method)	Youlin, 1984 (Mode superposition method)	
Ω_1 (rad/ sec)	3.7056	3.705	3.157	3.279	
Ω_2 (rad/ sec)	16.1326	16.127	-	17.921	
	Wang, 1996-a	Wang, 1996-b	Lashkari, 1988	Wang, 1989	Lee, 2007
Ω_1 (rad/ sec)	3.462	3.461	3.715	3.462	3.518
Ω_2 (rad/ sec)	21.525	19.239	21.200	21.20	20.763

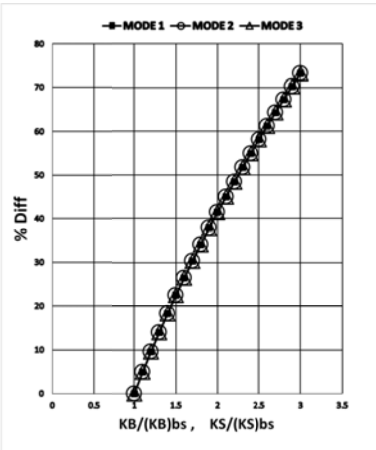


(ب) (الف)

شکل ۳ تغییرات فرکانس سازه مبنا بر حسب تغییر پارامترهای سازه ای الف: تغییر سختی خمشی، ب: تغییر سختی برشی



(ب) (الف)



(پ)

شکل ٤ تغییرات فرکانس سازه مبنا بر حسب تغییر پارامترهای سازه ای. الف) تغییر همزمان سختی برشی و سختی خمشی. ب) تغییر جرم سازه. پ) تغییر ارتفاع سازه

نتایج شکل (۳-الف) نشان می دهد که تغییرات سختی خمشی یک سازه بلند کمترین تأثیر را بر فرکانس مد اول و بیشترین تأثیر را بر فرکانس مد سوم ارتعاش سازه مبنا دارد و بالعکس، نتایج شکل (۳-ب) نشان می دهد که تغییرات سختی برشی یک سازه بیشترین تأثیر را بر مد اول ارتعاش و کمترین تأثیر را بر مد سوم ارتعاش سازه مبنا دارد. نتایج شکل (٤-الف) حاکی از آن می باشد که تغییر همزمان سختی برشی و سختی خمشی اثر کاملا یکسان بر تغییر هر سه فرکانس اول سازه دارد. نتایج شکل (٤-ب) نشان می دهد که تغییر جرم سازه نیز تأثیر یکسان بر تغییر هر سه مد اول ارتعاش سازه داشته است. و در نهایت، نتایج شکل (٤-پ) نشان می دهد که تغییر ارتفاع سازه بیشترین تأثیر را بر تغییر فرکانس سوم و کمترین تأثیر را بر فرکانس اول ارتعاش سازه دارد.

نتیجه گیری

روش‌های تحلیل اجزا محدود بر پایه مدلسازی گسسته استوار است و نیاز به حل همزمان هزاران معادله خطی به منظور ارائه نتایج عددی و کاربردی تحلیل سازه دارد. همچنین مدلسازی یک سازه بلند در نرم افزار تحلیل اجزا محدود بدلیل داشتن المان های سازه ای زیاد، بسیار وقت گیر می باشد. بنابراین روش تحلیل اجزا محدود برای مراحل نهایی و تحلیل دقیق یک سازه بلند مناسب می باشد. روش ارائه شده در این تحقیق یک دید روشن از تحلیل ارتعاش آزاد سازه بلند ارائه می کند. سادگی و دقت بالای روش ارائه شده در این تحقیق موجب می شود که در تحلیل تقریبی و مراحل مقدماتی طراحی یک سازه بلند (که نیازی به مدلسازی دقیق نرم افزاری وجود ندارد) قابل استفاده باشد. در این تحقیق، سازه بلند در یک محیط پیوسته مدلسازی شده است که این مساله به واقعیت سازه نزدیک تر است. همچنین روش ارائه شده تنها نیاز به حل یک معادله دیفرانسیل داشته و به راحتی قابل کدنویسی در نرم افزارهای مختلف می باشد. نتایج تحلیل تقریبی بدست آمده به کمک روش ارائه شده می تواند در جهت کاهش خطاهای مدلسازی دقیق سازه در نرم افزار تحلیل اجزا محدود، تخمین ابعاد اولیه المان های سازه ای و مشخصات مصالح مورد بررسی و ... مفید واقع گردد.

در این تحقیق، معادلات انتگرالی تضعیف شده جهت محاسبه فرکانس های طبیعی ارتعاش سازه بلند با خصوصیات سختی و جرم متغیر در ارتفاع تحت تأثیر نیروی محوری ارائه شده است. از طریق چهار مرتبه انتگرال گیری پی در پی، معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش تیر به فرم تضعیف شده آن تبدیل شده است. تابع مد شکل ارتعاش توسط یک سری توانی تقریب زده شده و به این طریق معادلات تضعیف شده تبدیل به دستگاه معادلات جبری خطی شده اند. فرکانس طبیعی ارتعاش سازه بلند با محاسبه جواب غیر بدیهی دستگاه معادلات محاسبه شده است. نتایج تحلیل نشان دهنده همگرایی سریع روش ارایه شده می باشد. به طوری که با در نظر گرفتن تنها ٤ جمله از سری توانی (٢٤)، فرکانس های اول و دوم ارتعاش به جواب تحلیل اجزا محدود همگرا شده است. با افزایش تعداد جملات در نظر گرفته شده برای سری توانی، دقت فرکانس های محاسبه شده افزایش یافته و فرکانس های طبیعی مدهای ارتعاشی بالاتر نیز محاسبه شده اند. نتایج تحلیل نشان می دهد که تغییرات سختی برشی یک سازه بیشترین تأثیر را بر مد اول ارتعاش و کمترین تأثیر را بر مد سوم ارتعاش سازه مبنا دارد و بالعکس، تغییرات سختی خمشی یک سازه بلند کمترین تأثیر را بر فرکانس مد اول وبیشترین تأثیر را بر فرکانس مد سوم ارتعاش سازه مبنا دارد.

مراجع

1. Kazaz, İ. and Gülkan P., "An Alternative Frame-shear Wall Model: Continuum Formulation", *Struct. Design Tall Spec. Build*., Vol. 21, pp. 524–542, (2012).
2. Park, YK, Kim, HS. and Lee, DG., "Efficient Structural Analysis of Wall–frame Structures", *Struct. Design Tall Spec. Build*., Vol. 23, pp. 740–759, (2014).
3. Rahgozar, R., Mahmoudzadeh, Z. and Malekinejad, M., "Dynamic Analysis of Combined System of Framed Tube and Shear Walls by Galerkin Method Using B-spline Functions", *The Structural Design of Tall and Special Buildings,* DOI: 10.1002/tal.1201. (2014).
4. Kamgar, R. and Saadatpour, MM., "A Simple Mathematical Model for Free Vibration Analysis of Combined System Consisting of Framed Tube, Shear Core, Belt Truss and Outrigger System with Geometrical Discontinuities", *Journal of Applied Mathematical Modeling,* Vol. 36, pp. 4918–30, (2012).
5. Malekinejad, M. and Rahgozar, R., "A Simple Analytic Method for Computing the Natural Frequencies and Mode Shapes of Tall Buildings", *Journal of Applied Mathematical Modeling,* Vol. 36, pp. 3419–32, (2012).
6. Malekinejad, M. and Rahgozar, R., "An Analytical Model for Dynamic Response Analysis of Tubular Tall Buildings", *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, Vol. 23, pp. 67-80, (2014).
7. Zalka, KA., "Torsional Analysis of Multi-storey Building Structures under Horizontal Load", *Struct. Design Tall Spec. Build.*, Vol. 22, pp. 126–43, (2013).
8. Mohammadnejad, M., "A New Analytical Approach for Determination of Flexural, Axial and Torsional Natural Frequencies of Beams", *Structural Engineering and Mechanics an International Journal,* Vol. 55, pp. 655-674, (2015).
9. Mohammadnejad, M., Saffari, H. and Bagheripour, MH., "An Analytical Approach to Vibration Analysis of Beams with Variable Properties", *Arabian Journal for Science and Engineering,* Vol. 39, pp. 2561-2572, (2014).
10. Saffari, H. and Mohammadnejad, M., "On the application of weak form integral equations to free vibration analysis of tall structures", *Asian Journal of Civil Engineering (BHRC),* Vol. 16, pp. 977-999, (2015).
11. Saffari, H., Mohammadnejad, M. and Bagheripour, MH., "Free vibration analysis of non-prismatic beams under variable axial forces", *Structural Engineering and Mechanics An International Journal,* Vol. 43, pp. 561-82, (2012).
12. Lee, WH., "Free vibration analysis for tube-in-tube tall buildings", *J. Sound Vib.,* Vol. 303, pp. 287–304, (2007).

13. Kaviani, P., Rahgozar, R. and Saffari, H., "Approximate analysis of tall buildings using sandwich beam models with variable cross section", *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, Vol. 17, pp. 401-418, (2008).
14. Tarjan, G. and Kollar, LP., "Approximate analysis of building structures with identical stories subjected to earthquakes", *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 41, pp. 1411–1433, (2004).
15. Potzta, G. and Kollar, LP., "Analysis of building structures by replacement sandwich beams", *International journal of solid and structures,* Vol. 40, pp. 535-553, (2003).
16. Li, QS., Fang, JQ. And Jeary, AP., "Free vibration analysis of cantilevered tall structures under various axial loads", *Journal of Engineering Structures,* Vol. 22, pp. 525-534, (2000).
17. Lee, J., Bang, M. and Kim, JY., "An analytical model for high-rise wall-frame structures with outriggers", *The Structural Design of Tall and Special Buildings.,* Vol. 17, pp. 839–851, (2008).
18. Kwan, AKH., "Simple method for approximate analysis of framed tube structures", *Journal of Structural Engineering.,* Vol. 120, pp. 1221–1239, (1994).
19. Stafford Smith, B. and Coull, A., "Tall Building Structures: Analysis and Design", *Wiley*, New York, (1991).
20. Taranath, BS., "Structural Analysis and Design of Tall Buildings", McGraw-Hill, New York, (1988).
21. Bozdogan, KB., "An approximate method for static and dynamic analysis of symmetric wall-frame buildings", *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, Vol. 18, pp. 279–290, (2009).
22. Li, QS., "A new exact approach for determining natural frequencies and mode shapes of non-uniform shear beams with arbitrary distribution of mass or stiffness", *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 37, pp. 5123-41, (2000).
23. Kamgar, R. and Rahgozar, R. "A simple approximate method for free vibration analysis of framed tube structures", *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, Vol. 22, pp. 217-234, doi:10.1002/tal.680, (2013).
24. Clough, RW. and Penzien, J., "Dynamics of Structures", McGraw-Hill Book Company, New York, (1975).
25. Chopra, AK., "Dynamics of Structures Theory and Application to Earthquake Engineering", Prentice Hall, New Jersey, (1995).